彗星ダストテイル三次元モデル逆解析法について（レビュー）

On the Inverse Approach for Three Dimensional Model of Cometary Dust Tail (Review)

秋澤宏樹 （姫路市「星の子館」）、菅原賢（厚木市子ども科学館）
Hiroki Akisawa（Himeji City “Hoshinoko Yakata“）and
Ken Sugawara (Atsugi City Children’s Science Center)

Abstract

We review the theoretical details on the inverse approach for three dimensional model of cometary dust tail that stand on the history of four stage of dust tail model evolution.

彗星のダストテイルモデル発展の4段階に基づく、ダストテイル三次元モデル逆解析法について、その理論的詳細をレビューする。

はじめに

ダストテイル研究史を概観すると、次の 4 段階に分けられる。

(1) Bessel-Bredichin 理論 19 世紀～20 世紀初め

彗星の尾の最初のモデルで、尾は太陽からの斥力で反太陽方向になびくことを前提に、粒子に働く力を考えて、シンクロン（等時放出線）・シンダイン（等斥力線）の考え方を導入し、尾の形から、粒子の放出時刻、粒子の性質（斥力の値）を推定できる。（以下、**BB 法**と略）

(2) Finson-Probstein 理論 1968 年

ダストテイルの輝度分布を再現する最初のモデルで、ダスト粒子の放出初速度を考慮に入れることで、BB 法では二次元だった理論を三次元化し、シンクロン・シンダイン上で広がるダストシェル（同じ速度で放出された一群のダストが作る球殻）の視線方向での重なりを積分することで、ダストテイル内の各格子点（グリッドポイント）の密度を求め、輝度分布へと変換した。観測結果とフィットができれば、ダスト放出率、ダストサイズ分布、ダスト放出初速度を求められる。（以下、**FP 法**と略）

(3) 木村−劉 理論 1977 年

個々のダスト粒子の軌道に着目をした最初のモデルで、FP 法では近似的に数値積分したダストの空間密度を、個々のサンプル・ダスト粒子の軌道を計算し、分布を求めることで決定する。その結果、放出されたダストは、その放出地点から近点離角が 180° 離れた地点で再び軌道面に集まることを予測し、これをネックライン（首軸）構造と命名した。（以下、**KL 法**と略）

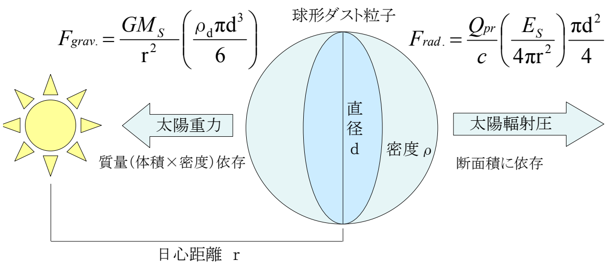
(4) 逆モンテカルロ法 1987 年以降

M.Fulle（1987、1989）によって開発された方法で、FP 法を逆問題にすることで、CCD 画像からの直接入力を可能にし、最小二乗法的にパラメータを決定する手法によって、現在のダストテイル解析法の主流となっている。KL 法の長所を全て取り入れ、個々の軌道を計算する。ダストシェルが全球的ではない非等方放出の仮定でも計算が可能で、ダスト質量損失率、ダストサイズ分布、ダスト放出初速度に、時間による変動を組み込むことも可能になった。（以下、**逆算法**と略）

以下、この 4 段階の順番に、その理論の詳細を紹介する。

1 BB 法

Friedrich W.Bessel（1784-1846）は、太陽の斥力によって、彗星の尾が反太陽方向になびいていると考えた。Fjodor A.Bredichin（1831-1904）は、シンクロン（等時放出線）・シンダイン（等斥力線）の考え方を導入した。この時点で斥力の起源は未知であったが、Svante Arrhenius（1859-1927）は斥力（μ）として太陽光の輻射圧を提案した。



上図中の、太陽重力と太陽輻射圧の比を、

$$\beta = 1 - \mu = \frac{F_{rad.}}{F_{grav.}} \quad \cdots \text{(1)式}$$

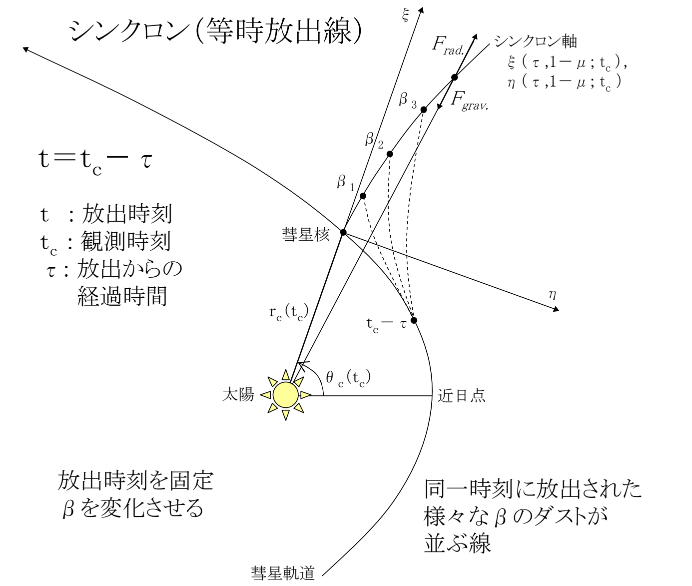
と定義すると、各定数は、散乱効率 Q_{pr}≒1（Burns, *et al.*, 1979）、平均全太陽輻射 E_S =3.93×10^{26} W、万有引力定数 G =6.674×10^{-11} N m^2 kg s^{-2}、太陽質量 M_S =1.989×10^{30} kg、光速度 c =2.99792458×10^8 m s^{-1}なので、

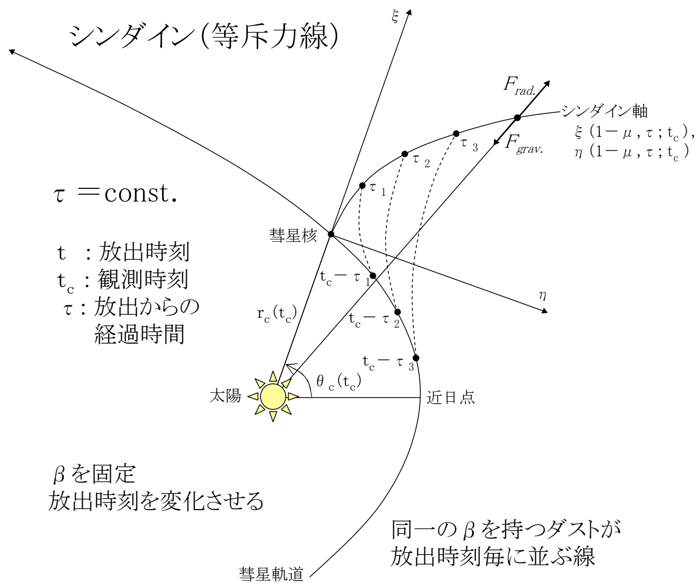
$$1 - \mu = C(\rho_d d)^{-1} \quad \cdots \text{(2)式}$$

$$C = \frac{3Q_{pr}E_S}{8\pi\, cGM_S} = 1.19 \times 10^{-3} \quad Q_{pr}\ \ kg\ \ cm^{-2}$$

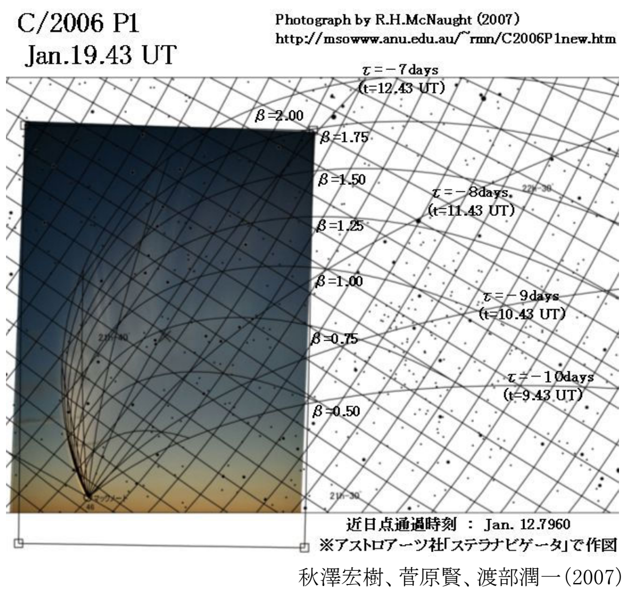
となり、β の値は日心距離に依存せず一定である。また、β は動径方向の比であるために、G に対する係数として働くことが解る。

ここで、同一時刻に放出された異なる β の値を持つダストの運動（＝シンクロン）と、異なる時刻に放出された同じ β の値を持つダストの運動（＝シンダイン）について考えてみよう。





すると、彗星本体の位置推算と同様に、β と t（τ）を任意に変えながら計算してゆくと、シンクロン・シンダイン網の図を描くことができるので、観測

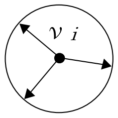


秋澤宏樹、菅原賢、渡部潤一（2007）

と比較すれば、ダストテイル上の場所ごとに、そこを構成しているダストのtとβが求められる。そして、シンクロンに沿った変化からはダストの放出時期や活動度の周期性、βの範囲からはMie散乱理論との比較によってダスト粒子の種類や大きさを推定できる。

2 FP 法

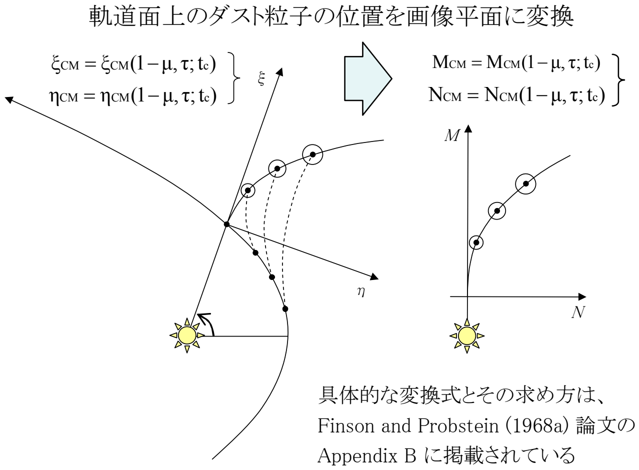
Finson と Probstein（1968a、b）は、ダストの放出初速度ν_iを考えることで、シンクロン・シンダイン網の各点を中心に拡がるダストシェル（球殻）の考え方を導入して、BB 法を発展させた。FP 法には、シンクロンに着目したシンクロン・アプローチと、シンダインに着目したシンダイン・アプローチがあるが、ここではシンダイン・アプローチを例に紹介する。



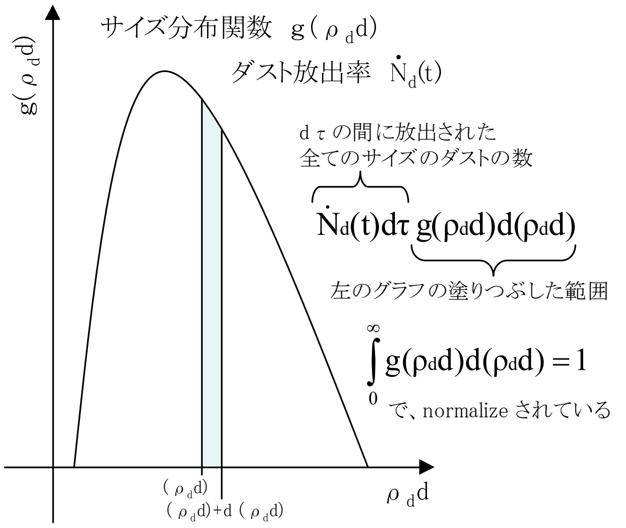
$1-\mu$はダストサイズの指標であるから、

$$\nu_i = \nu_i\,(1-\mu,\ \tau;\ t_c)$$

すると、シンダインに沿ったダストシェル（球殻）が形成されるので、これを観測画像平面に投影して、重なった全てのダストシェルを視線方向に積分する。こうしてグリッドポイント毎の密度を求め、輝度分布を再現するのが FP 法の考え方である。BB 法では平面として扱われていたダストテイルを三次元的な構造として捉えることで、その視線方向の幾何学的な密度から輝度分布が再現できるようになった。



まず、τから$\tau + d\tau$の間に放出された、$(\rho_d d)$から$(\rho_d d)+d(\rho_d d)$の大きさの、ダスト粒子の数を考える。



これを不確かな量$(\rho_d d)$ではなく、観測から解る量$(1-\mu)$で表すことを考えると、光の散乱が断面積$(\rho_d d)^2$ に比例していることから、

$$f(1-\mu)d(1-\mu) \propto (\rho_d d)^2 g(\rho_d d)d(\rho_d d) \quad \cdots (3)式$$

$\int_0^\infty f(1-\mu)d(1-\mu) = 1$ で、normalize しておくと、

$$f(1-\mu)d(1-\mu) = \frac{(\rho_d d)^2 g(\rho_d d)d(\rho_d d)}{\int_0^\infty (\rho_d d)^2 g(\rho_d d)d(\rho_d d)} \quad \cdots (4)式$$

$$\because \int_0^\infty f(1-\mu)d(1-\mu) = \int_0^\infty \frac{(\rho_d d)^2 g(\rho_d d)d(\rho_d d)}{\int_0^\infty (\rho_d d)^2 g(\rho_d d)d(\rho_d d)} = 1$$

BB 法より、

$1-\mu = C(\rho_d d)^{-1}$ であるから、

$$d(1-\mu) = d\left\{C(\rho_d d)^{-1}\right\}$$

$$d(1-\mu) = C\,d\left\{(\rho_d d)^{-1}\right\} \quad \cdots (5)式$$

(4)式の両辺を(5)式で割ると、

$$f(1-\mu) = \frac{(\rho_d d)^2 g(\rho_d d)d(\rho_d d)}{Cd\left\{(\rho_d d)^{-1}\right\}} \Bigg/ \int_0^\infty (\rho_d d)^2 g(\rho_d d)d(\rho_d d) = 1$$

ここで、$\dfrac{d(\rho_d d)}{d\left\{(\rho_d d)^{-1}\right\}} = -(\rho_d d)^2$ なので、

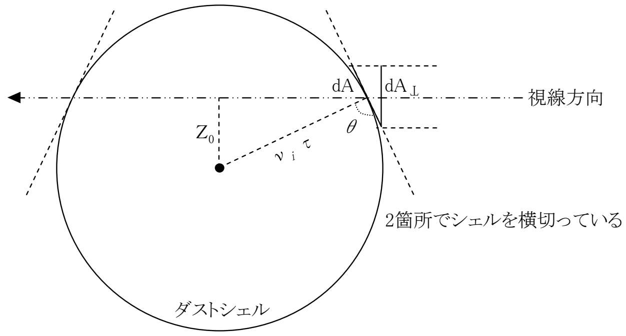
$$\therefore f(1-\mu) =$$

$$-\frac{1}{C}(\rho_d d)^4 g(\rho_d d) \Bigg/ \int_0^\infty (\rho_d d)^2 g(\rho_d d)d(\rho_d d) \quad \cdots (6)式$$

(6)式は不確かな量(ρ_dd)に依存しているg(ρ_dd)を、β=(1－μ)に基づいたf(1－μ)に変換するための式となる。そこで、τ から τ+dτ の間に放出された、(1-μ)から (1-μ)+d (1-μ)の大きさの、ダスト粒子の数は、

$$\dot{\mathrm{N}}_\mathrm{d}(t)d\tau\, f(1-\mu)d(1-\mu) \quad \cdots(7)式$$

次に、τ から τ+dτ の間に放出された、(1-μ)から (1-μ)+d (1-μ)の大きさの、ダストシェルの視線方向の表面密度について考えると、



$$2\times\frac{\dot{\mathrm{N}}_\mathrm{d}\, f(1-\mu)d\tau d(1-\mu)}{4\pi(\nu_i\tau)^2}\frac{dA}{dA_\perp} \quad \cdots(8)式$$

$$\frac{dA_\perp}{dA}=\sin\theta=(1-\cos^2\theta)^{1/2} \quad \cdots(9)式$$

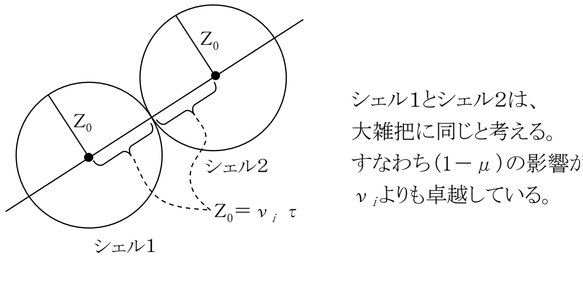
$$\cos\theta=\frac{z_0}{\nu_i\tau} \ なので$$

$$\frac{dA_\perp}{dA}=\sin\theta=\left(1-\frac{z_0^{\ 2}}{\nu_i^{\ 2}\tau^2}\right)^{1/2} \quad \cdots(10)式$$

(8)式に(10)式を代入すると、

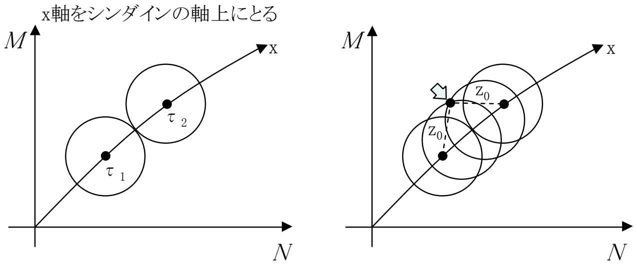
$$\frac{\dot{\mathrm{N}}_\mathrm{d}\, f(1-\mu)d\tau d(1-\mu)}{2\pi(\nu_i\tau)^2\left[1-z_0^{\ 2}/(\nu_i\tau)^2\right]^{1/2}} \quad \cdots(11)式$$

(11)式を $z_0=\nu_i\tau$ になるような τ_1、τ_2 で積分する。



$$\frac{f(1-\mu)d(1-\mu)}{2\pi}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\frac{\dot{\mathrm{N}}_\mathrm{d}\, d\tau}{(\nu_i\tau)^2\left[1-z_0^{\ 2}/(\nu_i\tau)^2\right]^{1/2}} \quad \cdots(12)式$$

つまり、シェル1とシェル2の間にあるグリッドポイント(⇦)の表面密度には、τ_1からτ_2の間に存在するシェルが影響している。



(12)式の積分は非常に面倒なので、hypersonic approximation（超音速近似＝1968 年当時の計算機の処理能力に合わせ、極力積分を避けて計算を楽にするため近似条件)を用いる。

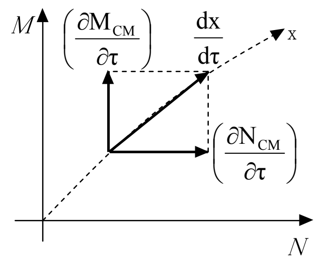
$$\frac{dx}{d\tau}>>\nu_i \quad \cdots(13)式$$

すなわち、シェルの拡散速度よりも、シェルの移動速度の方が十分に早い場合を考えており、これは反太陽方向にダストテイルが形成されることから考えて、合理的な仮定と言える。

hypersonic approximation が成立しているとき、

$$\frac{dx}{d\tau}(\tau;1-\mu,t_c)=\left[\left(\frac{\partial M_{CM}}{\partial\tau}\right)^2+\left(\frac{\partial N_{CM}}{\partial\tau}\right)^2\right]^{1/2} \cdot\cdot(14)式$$

これは、画像平面上でダスト粒子がシンダイン上を離れていくスピードを、三平方の定理でM軸とN軸の成分に分解したことを意味する。



$$d\tau=\frac{dx}{(dx/d\tau)} \ とおくと、(12)式は、$$

$$\frac{f(1-\mu)d(1-\mu)}{2\pi}\int_{x_1}^{x_2}\frac{\dot{\mathrm{N}}_\mathrm{d}\, dx}{(\nu_i\tau)^2(dx/d\tau)\left[1-z_0^{\ 2}/(\nu_i\tau)^2\right]^{1/2}} \quad \cdots(15)式$$

となり、つまり、シンダイン上の座標x_1から x_2までを積分していることを示している。

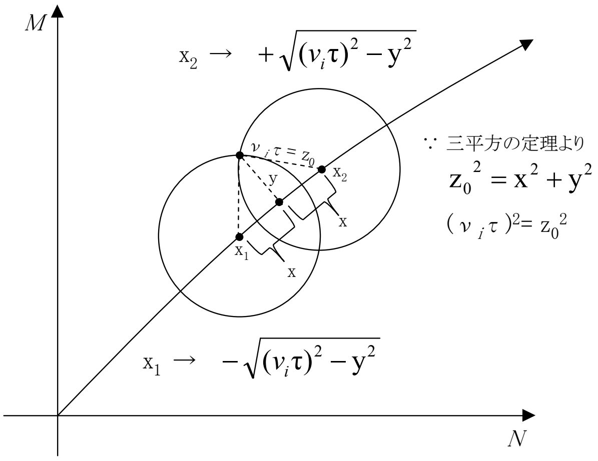
hypersonic condition は $S\equiv\frac{(dx/d\tau)}{\nu_i}>>1$ なので、$\dot{\mathrm{N}}_\mathrm{d}$、$\nu_i\tau$、dx/dt を、

S^{-2} のべき級数に展開できる。

$$\dot{N}_d = \dot{N}_{d0} + \dot{N}_{d1}(S^{-2}) + \dot{N}_{d2}(S^{-2})^2 + \quad \cdots$$
$$\nu_i\tau = \nu_i\tau_0 + \nu_i\tau_1(S^{-2}) + \nu_i\tau_2(S^{-2})^2 + \quad \cdots$$
$$dx/dt = (dx/dt)_0 + (dx/dt)_1(S^{-2}) + (dx/dt)_2(S^{-2})^2 + \cdots$$

S>>1、つまり S^{-2}<<<1 であれば、ゼロ次の項だけをとれる（S>>1ならば、これらの変数はオーダー0(S^{-2})で τ に依存しない）ので、積分の外に出せて、

$$\frac{\dot{N}_d f(1-\mu)d(1-\mu)}{2\pi(\nu_i\tau)(dx/d\tau)}\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{\left[(\nu_i\tau)^2 - z_0^{\ 2}\right]^{1/2}} \quad \cdots(16)式$$



上図より $x_{1,2} = \pm\left[(\nu_i\tau)^2 - y^2\right]^{1/2}$ なので、(16)式の z_0 を x^2+y^2 に置き換えると、

$$\frac{\dot{N}_d f(1-\mu)d(1-\mu)}{2\pi(\nu_i\tau)(dx/d\tau)}\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{\left[(\nu_i\tau)^2 - y^2 - x^2\right]^{1/2}} \cdots(17)式$$

積分公式 $\int\frac{dx}{(a^2 - x^2)} = \arcsin\frac{x}{a}$ を用いると、(17)式は、

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{\left[(\nu_i\tau)^2 - y^2 - x^2\right]^{1/2}} = \left[\arcsin\frac{x}{\sqrt{(\nu_i\tau)^2 - y^2}}\right]_{-\sqrt{(\nu_i\tau)^2 - y^2}}^{+\sqrt{(\nu_i\tau)^2 - y^2}}$$

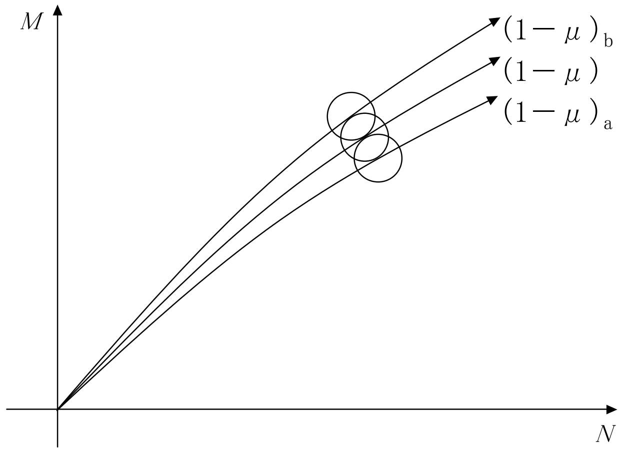
$$= \arcsin 1 - \arcsin(-1) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

そこで π で(17)式の左辺をキャンセルすると、

$$\dot{N}_d f(1-\mu)d(1-\mu)\left[2\nu_i\tau\frac{dx}{d\tau}(\tau;1-\mu,t_c)\right]^{-1} \cdots(18)式$$

隣接するシンダイン同士の影響を考慮すると、任意のグリッドポイントの密度 D は、

$$D = \int_{(1-\mu)_a}^{(1-\mu)_b}\dot{N}_d f(1-\mu)\left[2\nu_i\tau\frac{dx}{d\tau}(\tau;1-\mu,t_c)\right]^{-1} d(1-\mu)$$
$$\cdots(19)式$$



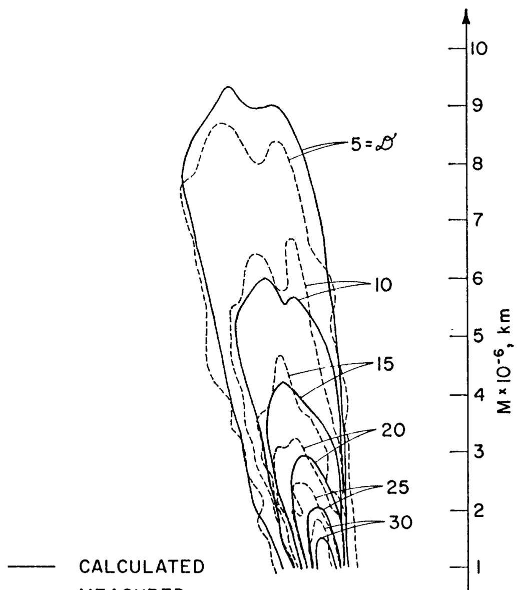
こうして、FP 法では、任意のグリッドポイント毎に密度 D を計算し、それを輝度に変換をして、ダストテイルの輝度分布を再現する。

FP 法のまとめ・・・ 3つの未知の関数

ダスト放出率 $\dot{N}_d(t)$
サイズ分布関数 $f(1-\mu)$
ダスト放出速度 $\nu_i(1-\mu, \tau; t_c)$

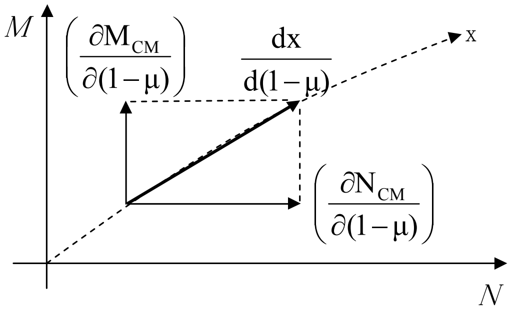
の関わりで表した、テイルのダストの密度によって散乱された光の表面輝度の再現を行う方法。

FP 法による計算と観測の比較例



Comet Arend-Roland, May 2.9, 1957
(Finson and Probstein, 1968b)

ここまで、シンダイン・アプローチについて紹介してきたが、シンクロン・アプローチでも同様の考え方をする。



従って、(19)式に相当する式は、

$$D=\int_{\tau_1}^{\tau_2}\dot{\mathrm{N}}_{\mathrm{d}}f(1-\mu)\left[2\nu_i\tau\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{d}(1-\mu)}(1-\mu;\tau,\mathrm{t_c})\right]^{-1}\mathrm{d}\tau$$

・・・(20)式

となる。以下、このシンクロン・アプローチを例に、長谷川(1989)による実際の解き方を紹介する。

1. 特定のτについて(1－μ)を少しずつ変えながら、シンクロン曲線 M_{CM}、N_{CM} を計算する。これはBB法で行うことができる。

2. シンクロン曲線の微分が必要になるので適当な解析曲線に近似する。例えば、次のような二次曲線を用いる。

$$M_{CM}(1-\mu;\tau,t_c)=c_1(\tau,t_c)(1-\mu)+c_2(\tau,t_c)(1-\mu)^2$$
$$N_{CM}(1-\mu;\tau,t_c)=c_3(\tau,t_c)(1-\mu)+c_4(\tau,t_c)(1-\mu)^2$$

3. 各グリッドポイント(M_0,N_0)からシンクロンへ垂線を引く。
$$-\frac{\partial N_{CM}/\partial(1-\mu)}{\partial M_{CM}/\partial(1-\mu)}=\frac{M_0-M_{CM}(1-\mu)}{N_0-N_{CM}(1-\mu)}$$

4. グリッドポイントの座標が、初速によって広がったダストシェルの中に入るシンクロンか調べる。次の条件を満たすと、そのシンクロンの密度がダストテイルの輝度に影響を与えることになる。
$$(M_0-M_{CM})^2+(N_0-N_{CM})^2\le v_i^2(1-\mu,\tau;t_c)\tau^2$$

5. グリッドポイントでの密度を次式で計算し、その値を dτ で積分して、グリッドポイントの密度に加算する。
$$\dot{\mathrm{N}}_{\mathrm{d}}f(1-\mu)\left[2\nu_i\tau\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{d}(1-\mu)}(1-\mu;\tau,\mathrm{t_c})\right]^{-1}$$

6. 以上の操作をダストテイルの広がりを含むと考えられるτの範囲について行う。こうして得られた密度 D を最後に輝度 I に変換する。

$$I=\frac{I_0A\phi(\alpha)}{16\Delta^2}\left(\frac{1}{r_c}\right)^2\frac{\left\langle(\rho_\mathrm{d}\mathrm{d})^2\right\rangle}{\rho_\mathrm{d}^2}\frac{\dot{N}_d}{(\dot{N}_d)_{rel}}D$$

$$\left\langle(\rho_\mathrm{d}\mathrm{d})^2\right\rangle=\int_0^\infty(\rho_\mathrm{d}\mathrm{d})^2g(\rho_\mathrm{d}\mathrm{d})\mathrm{d}(\rho_\mathrm{d}\mathrm{d})$$

$$\because\ \frac{I_0\pi d^2/4}{4\pi\Delta^2}A\varphi(\alpha)\left(\frac{1\ \ \mathrm{a.u.}}{r_c}\right)^2$$

ここで、A はアルベド(反射能)、$\phi(\alpha)$は位相角、Δは地心距離、r_c は日心距離、I_0 は1天文単位での太陽輝度を表している。

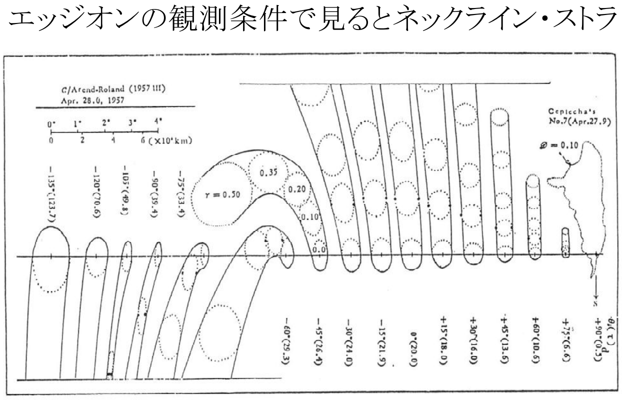
3 KL 法

木村と劉(1977)は、FP 法の問題点として、ダストシェルの時間によるリニアな拡大の仮定に関して、より制限が加えられるべきであることを指摘した。

→ この近似は、1－μ＝1の場合にだけ厳密。

→ ダスト放出からπより非常に小さな真近点離角の観測の間にだけ、1－μ＜1の場合は良く近似できる。

実際に、近点離角がπに近い間隔で、ダストシェルは放出時における球殻(ダスト放出の非等方性を無視したとき)から、球とは程遠い彗星軌道平面上の平坦な長円になってしまい(これを軌道面にエッジオンの観測条件で見るとネックライン・ストラ



Comet Arend-Roland, Apr. 28.0, 1957 (Kimura and Liu, 1977)

クチャー＝首軸構造になる)、従って、パースペクティブが観測－πの近点離角付近で放出されたダストの形成したダストテイルの解析には適切ではない。

そこで、KL 法では、ダストシェルのリニアな拡大という力学的近似を避けるため、それぞれのダスト粒子の空間における運動を、以下の条件の下で考慮している。

→ 数値積分の複雑さが増すので、解を探す単純化のため、ダスト生成率と放出速度関数に仮定を導入。

→ 放出速度関数の時刻による変化を考慮し、ダスト生成率については日心距離によってのみ決まる関数とした。

こうした KL 法における、ダストの運動方程式は、逆算法に全て取り込まれているので、次の逆算法の章の中で、まとめて詳しく紹介することにする。

4 逆算法

FP 法のように、モデルを観測にフィットしてパラメータを決めるのではなく、観測画像のデータからモデルのパラメータを決定する方法で、FP 法への逆問題の適用として、Marco Fulle（1987、1989）によって開発された。

以下、『Wikipedia』から抜粋引用すると、「逆問題（Inverse problem）は応用数学の一分野で、順問題（Direct problem）と対になる概念である。入力（原因）から出力（結果、観測）が求められる問題を順問題とすると、その逆に出力から入力を推定する問題のことを逆問題という。順問題と逆問題は対なので、どちらが順で、どちらが逆かというのは相対的な問題であるが、一般に、古くから問題として認識され研究が行われている方を順問題、その逆のプロセスを解くことで何らかの利用ができる方を逆問題としている。

例えば、数列 $a_n=n^2$ を考えたとき、n=1 で $a_n=1$、n=2 で $a_n=4$、n=3 で $a_n=9$ となる。この計算を順問題とした場合、逆問題は、$a_1=1$、$a_2=4$、$a_3=9$ というデータから、一般項 a_n を推定することである。

逆問題を解く際によく問題になるのが適切性（well-posedness）である。次の 3 つの条件が満たされるとき、アダマール（Jacques Hadamard）の意味で適切であるという。

解の存在性：解が存在すること

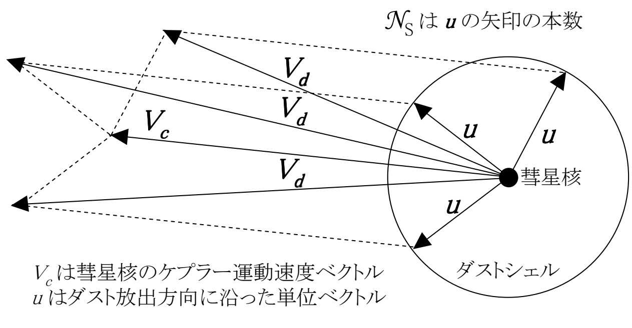
解の一意性：解がただ一つであること

解の安定性：入力に微小な変動を与えたときに、出力の変動も微小であること

上に挙げた数列の例では、逆問題だと $a_n=n^2$ のほか、例えば $a_n=n^3-5n^2+11n-6$ も解となり、解の一意性が満たされないので、非適切な問題といえる。

非適切な問題の近似解を得る手法として、よく使われるのが、ティホノフの正則化法（Tikhonov's regularization method）である。線形有界作用素（連続な線型写像）K:X→Y についての方程式 Kx=y の近似解を得るために、ティホノフ汎関数：$J_\alpha(x)=\|Kx-y\|^2+\alpha\|x\|^2$ for $x\in X$ という正則化パラメータ α を導入し、これを最小にする $x^\alpha\in X$ を求める」（引用部以上）というものである。

さて、$\mathcal{N}_t\times\mathcal{N}_\mu\times\mathcal{N}_S$ 個のサンプル・ダスト粒子について考えてみよう。ここで、$\mathcal{N}_t$ は時刻のサンプル数、$\mathcal{N}_\mu$ はサイズのサンプル数、$\mathcal{N}_S$ はダストシェル上に分布したダスト粒子のサンプル数である。

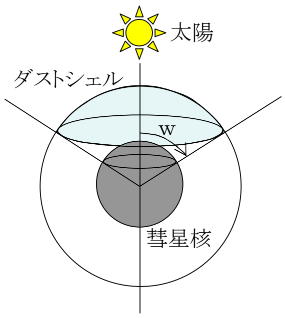


シェル上の $\mathcal{N}_S$ の粒子の速度ベクトル V_d は、

$$\mathbf{V_d}=\mathbf{V_c}+\nu(t)(1-\mu)^{1/k}\mathbf{u}_q\,;\quad q=1\ldots\mathcal{N}_S \quad \cdots(21)式$$

ここで V_c は彗星核のケプラー運動の速度ベクトル、$\boldsymbol{u}$ は放出速度に沿った単位ベクトル、$\nu(t)$ は時刻に依存するダスト放出速度（試行錯誤法によって

決定される関数)、(1－μ)は BB 法と FP 法で定義されたもので、ダストサイズの指標ともなっており、ダスト速度のサイズ依存性を k で定義している。Fulle (1989) によれば、Probstein (1968) の内部コマモデルから KL 法で与えられた値は 4 で、これは内部コマ構造に見られるジェットのモデルの Sekanina and Larson (1984) や Sekanina (1988) の値と一致しており、また Fulle and Sedmak (1988) による首軸構造の厚みの解析から得られた値 6 にも近いので、k は 4～6 程度の値とのことである。



次にダスト放出方向の非等方性＝異方性(unisotropy) について考える。異方性のパラメータを w とし、立体角で 4π（全球）、2π（半球）、π（太陽と彗星を結ぶ軸に対してπ／3) 等の様々な円錐で定義されるダストシェルの範囲に $\boldsymbol{u}$ の方向を限定して、$\mathcal{N}_S$ の個数を設定する。

こうして、ダスト粒子の軌道は、輻射圧の分だけ弱められた太陽重力場の中に、初速度 $\boldsymbol{V}_d$ で放出された結果、単純なケプラー運動となり、以下によって定義される。

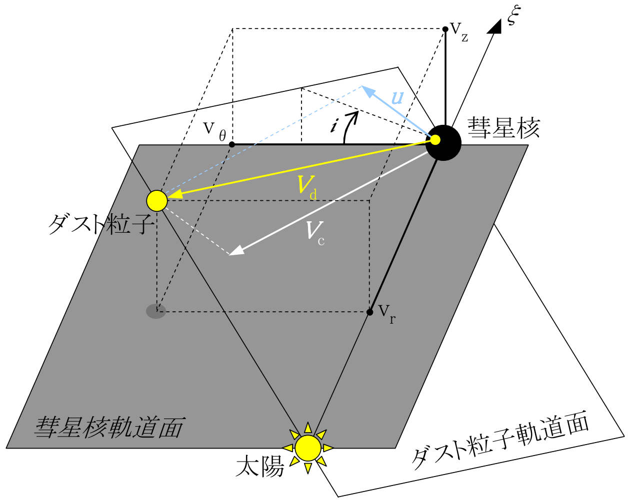
$$\left.\begin{aligned} \sin i &= v_z (v_\theta^2 + v_z^2)^{-1/2} \\ \cos i &= v_\theta (v_\theta^2 + v_z^2)^{-1/2} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\text{(22a)式}$$

$$e_d = \frac{\mu}{|\mu|}\sqrt{1 + \left[\frac{v_r^2 + v_\theta^2 + v_z^2}{\mu G M_S} - \frac{2}{r_c}\right]\frac{r_c^2 (v_\theta^2 + v_z^2)}{\mu G M_S}} \quad \cdots\text{(22b)式}$$

$$q_d = \frac{r_c^2 (v_\theta^2 + v_z^2)}{(1+e_d)\mu G M_S} \quad \cdots\text{(22c)式}$$

$$\left.\begin{aligned} \sin \omega_d &= v_r \sqrt{\frac{q_d (1+e_d)}{e_d^2 \mu G M_S}} \\ \cos \omega_d &= \sqrt{\frac{q_d (1+e_d)(v_\theta^2 + v_z^2)}{e_d^2 \mu G M_S}} - \frac{1}{e_d} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\text{(22d)式}$$

ここで、(22a) 式はダスト軌道面の彗星軌道面に対する傾斜角、(22b) 式はダスト軌道の離心率、(22c) 式はダスト軌道の近日点距離、(22d) 式はダスト軌道の近日点引数 (q_dと放出時の r_c の動径ベクトルの角度) である。v_r、v_θ、v_zはダスト粒子の速度ベクトル $\boldsymbol{V}_d$ の成分で、v_r は太陽方向、v_θ は v_r に垂直で彗星の軌道速度ベクトル $\boldsymbol{V}_c$ の半象限面内、v_z は v_r、v_θ 双方に垂直な方向である。



なお、彗星本体の軌道要素では、T (近日点通過時刻) と Ω (昇交点黄経) を加えた6要素があるが、ここでのダスト粒子の軌道要素では、ダスト放出が彗星軌道平面上で起こることから、いわばその瞬間が、昇交点通過時刻となっている。時刻 t_c におけるそれぞれのダスト粒子の位置は、そのケプラー運動から得られ、FP 法同様に、観測画像平面上の座標 (M,N) に投影して変換すると、個々のダスト粒子の位置する (M,N) 座標が計算できる。

ここで改めて Fulle (1987、1989) による KL 法の改良点の整理しておくと、

1. ダスト放出と観測時刻の間の真近点離角の差がπ／2よりも小さい場合、FP 法のダストシェルの直線的な拡大というアプローチは正しく理想化された状態であると考える。
2. 問題の解き方を逆にする。仮定したデータに従って3つの未知関数を考え最終的な結果として表面輝度関数 I(M,N)を得るのではなく、既知の関数 (観測) I(M,N)をデータソースとして、代数的に求めたい関数を得る。
3. ダストのサイズ分布は時刻により変化するものと考える。

以下この改良点 2.と 3.について述べるが、それにはまず、新しい未知関数 F(t,1－μ)を定義する。

$$F(\mathrm{t},1-\mu)=\dot{\mathrm{N}}_{\mathrm{rel}}(\mathrm{t})\,f(\mathrm{t},1-\mu)\quad\cdots(23)\text{式}$$

ここで、 $\dot{\mathrm{N}}_{\mathrm{rel}}(\mathrm{t})$ は時刻 t におけるダスト損失率、$f(\mathrm{t},1-\mu)$ は時刻 t において $1-\mu$ に依存するサイズ分布関数で、$N_{\mathrm{t}}\times N_{\mu}$ の各ポイントでサンプルする関数 F で、i =1・・・N_{t}、j =1・・・N_{μ} の未知ベクトル F_{ij}を得る。

一方、N_{m}と N_{n}を各々、画像上の M と N 方向のサンプル数、N_{p} を解析画像の枚数として、$N_{\mathrm{p}}\times N_{\mathrm{m}}\times N_{\mathrm{n}}$ の各ポイントにおける関数 I(M,N)から、k = 1・・・N_{p}、m =1・・・N_{m}、n =1・・・N_{n} のデータベクトル I_{kmn}を得る。

FP 法の(20)式、

$$D=\int_{\tau_1}^{\tau_2}\dot{\mathrm{N}}_{\mathrm{d}}\,f(1-\mu)\left[2\nu_i\tau\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{d}(1-\mu)}(1-\mu;\tau,\mathrm{t_c})\right]^{-1}\mathrm{d}\tau$$

の $\dfrac{\mathrm{dx}}{\mathrm{d}(1-\mu)}(1-\mu;\tau,\mathrm{t_c})$ を三平方の定理で(M,N)座標の成分に書き換え、また $\dot{\mathrm{N}}_{\mathrm{d}}$ を $\dot{\mathrm{N}}_{\mathrm{rel}}(\mathrm{t})$ に直して、

$$D(\mathrm{M},\mathrm{N})=\int_{\tau_1}^{\tau_2}\dot{\mathrm{N}}_{\mathrm{rel}}(\mathrm{t})f(1-\mu)\left\{2(\mathrm{t_c}-\mathrm{t})\nu(\mathrm{t},1-\mu)\left\{\left[\frac{\partial M_{\mathrm{CM}}}{\partial(1-\mu)}\right]^2+\left[\frac{\partial N_{\mathrm{CM}}}{\partial(1-\mu)}\right]^2\right\}^{1/2}\right\}^{-1}\mathrm{dt}$$

・・・(24)式

としたところで、行列式 A_{ijkmn}を次の通り定義する。

$$A_{ijkmn}=\int_{\mathrm{t}_{1ijkmn}}^{\mathrm{t}_{2ijkmn}}\left\{2(\mathrm{t}_{ck}-t)\nu_{ij}\left\{\left[\frac{\partial M_{\mathrm{CM}ijk}}{\partial(1-\mu)_j}\right]^2+\left[\frac{\partial N_{\mathrm{CM}ijk}}{\partial(1-\mu)_j}\right]^2\right\}^{1/2}\right\}^{-1}\mathrm{dt}$$

・・・(25)式

ν_{ij} は、$N_{\mathrm{t}}\times N_{\mu}$ の各ポイントでサンプルした速度関数である。ダストテイルの表面密度 D(M,N)と、観測されたダストテイルの表面輝度 I(M,N)が、粒子サイズの平方に比例していると考えると、(24)式は(23)式と(25)式により、

$$\sum_{ij}F_{ij}A_{ijkmn}=I_{kmn}\quad\cdots(26)\text{式}$$

となって、観測から求められる I_{kmn}を基に、未知ベクトル F_{ij}の値が得られることから、推論で未知関数 F(t,1－μ)が再構築できることになる。

しかし、この問題は、解の一意性が確立できないことと、データ（表面輝度関数 I）の僅かな乱れが解に大きな不安定性を引き起こすことの二点により、非適切問題（ill-posed problem）に分類される。

そこで近似解を得るために、次の通り、ティホノフの正則化法（Tikonov and Arsenine, 1977）を用いる。

1. $N_{\mathrm{p}}\times N_{\mathrm{m}}\times N_{\mathrm{n}} >> N_{\mathrm{t}}\times N_{\mu}$ を考えること。
2. Fが $\|AF-I\|^2+\alpha\|BF\|^2$を最小にすること。

これで(26)式に書き加えられた正則化方程式は、

$$B_{hij}=\left[r(t_h)/r(t_{h+1})\right]^2\delta_{h,i}-\delta_{h+1,i}\quad\text{for } j=1...N_\mu$$

$$\sum_{ij}F_{ij}B_{hij}=0$$

ここで r (t_h)は時刻 t_h における日心距離、$\delta_{h,i}$ はクロネッカー・シンボル（Kronecker symbol）※である。つまり、サイズ分布の時間依存性は緩やかなもので、ダスト生成率は日心距離の逆二乗に依存しているという物理的な制約を加えたことを意味する。

従って、F(t,1－μ)は、次の関数の最小値によって与えられる。

$$\sum_{k=1}^{Nk}\sum_{m=1}^{N_m}\sum_{n=1}^{N_n}\left[\sum_{i=1}^{Nt}\sum_{j=1}^{N\mu}A_{ijkmn}F_{ij}-I_{kmn}\right]^2$$

$$+\alpha\sum_{h=1}^{Nt}\left[\sum_{i=1}^{Nt}\sum_{j=1}^{N\mu}B_{hij}F_{ij}\right]^2=\min\ ,$$

$$A_{ijkmn}=\frac{N_m\ N_n}{\mathit{\Delta M\Delta N}\ \mathcal{N}_S\ \mathcal{N}_\mu}\sum_{h=1+(i-1)Rt}^{iRt}$$

$$\cdot\sum_{p=1+(j-1)R\mu}^{jR\mu}\ \sum_{q=1}^{\mathcal{N}_S}\mathit{\Delta}\mu_h\mathit{\Delta}t_hH_{kmnhpq}\ ,$$

$$B_{hij}=\left[\frac{r(t_h)}{r(t_{h+1})}\right]^2\delta_{h,i}-\delta_{h+1,i}\ ,$$

・・・(27)式

ここで、$\varDelta M\times\varDelta N$ は $N_{\mathrm{m}}\times N_{\mathrm{n}}$ のサンプル範囲、$\mathrm{R_X}=\mathcal{N}_{\mathrm{X}}/\mathrm{N_X}$は整数、$\varDelta t_h$は2つの時刻サンプルの時間間隔、$\varDelta\mu_h$は1－$\mu$ の時間に依存した最大値、添え字 h,p,q で記述されたダスト粒子のサンプルが添え字 k,m,n で表される画像セル内に投影される

※ クロネッカー・シンボルは $\delta_{h,i}=\begin{cases}1 & (h=i)\\ 0 & (h\neq i)\end{cases}$

ならば H_{kmnhpq}＝1、そうでなければ H_{kmnhpq}＝0 である。このようにして求めた F_{ij} から未知関数 $F(\mathrm{t},1-\mu)$ を再構築し、ダストの個数生成率及び質量損失率を求める。

(23)式より $f(\mathrm{t},1-\mu)=F(\mathrm{t},1-\mu)/\dot{\mathrm{N}}_{\mathrm{rel}}(\mathrm{t})$ なので、

$$\dot{\mathrm{N}}_{\mathrm{rel}}(\mathrm{t})=\int_0^\infty F(\mathrm{t},1-\mu)\mathrm{d}(1-\mu) \qquad \cdots(28)式$$

ダストの個数生成率 $\dot{\mathrm{N}}(\mathrm{t})$ と質量損失率 $\dot{\mathrm{M}}(\mathrm{t})$ を得るためには、$f(\mathrm{t},1-\mu)$ に関連したサイズ分布 $\mathrm{g}(\mathrm{t},\rho_{\mathrm{d}}\mathrm{d})$ の二次と三次のモーメント、$\langle(\rho_{\mathrm{d}}\mathrm{d})^2\rangle$ と $\langle(\rho_{\mathrm{d}}\mathrm{d})^3\rangle$ を計算しなければならない。FP 法(7)式を得るときと同様の考え方で、BB 法(2)式の $1-\mu=\mathrm{C}(\rho_{\mathrm{d}}\mathrm{d})^{-1}$ の関係より、

$$\mathrm{g}(\mathrm{t},\rho_{\mathrm{d}}\mathrm{d})=(1-\mu)^4 f(\mathrm{t},1-\mu)\Big/\left\{C_{pr}Q_{pr}\int_0^\infty(1-\mu)^2 f(\mathrm{t},1-\mu)\mathrm{d}(1-\mu)\right\} \qquad \cdots(29)式$$

となり、$\langle(\rho_{\mathrm{d}}\mathrm{d})^2\rangle$ と $\langle(\rho_{\mathrm{d}}\mathrm{d})^3\rangle$ は、

$$\left\langle(\rho_{\mathrm{d}}\mathrm{d})^2\right\rangle=\int_0^\infty(\rho_{\mathrm{d}}\mathrm{d})^2 g(\rho_{\mathrm{d}}\mathrm{d})\mathrm{d}(\rho_{\mathrm{d}}\mathrm{d})$$
$$=K_1\Big/\int_0^\infty(1-\mu)^2 f(1-\mu)\mathrm{d}(1-\mu) \qquad \cdots(30)式$$

$$\left\langle(\rho_{\mathrm{d}}\mathrm{d})^3\right\rangle=\int_0^\infty(\rho_{\mathrm{d}}\mathrm{d})^3 g(\rho_{\mathrm{d}}\mathrm{d})\mathrm{d}(\rho_{\mathrm{d}}\mathrm{d})$$
$$=K_2\frac{\int_0^\infty f(1-\mu)/(1-\mu)\mathrm{d}(1-\mu)}{\int_0^\infty(1-\mu)^2 f(1-\mu)\mathrm{d}(1-\mu)} \qquad \cdots(31)式$$

そこで、ダストの個数生成率は、

$$\dot{N}(\mathrm{t})=K_3\frac{\dot{\mathrm{N}}_{\mathrm{rel}}(\mathrm{t})I(\mathrm{M},\mathrm{N})}{\left\langle(\rho_{\mathrm{d}}\mathrm{d})^2\right\rangle D(\mathrm{M},\mathrm{N})}$$
$$=K_4\dot{\mathrm{N}}_{\mathrm{rel}}(\mathrm{t})\int_0^\infty(1-\mu)^2 f(\mathrm{t},1-\mu)\mathrm{d}(1-\mu) \qquad \cdots(32)式$$

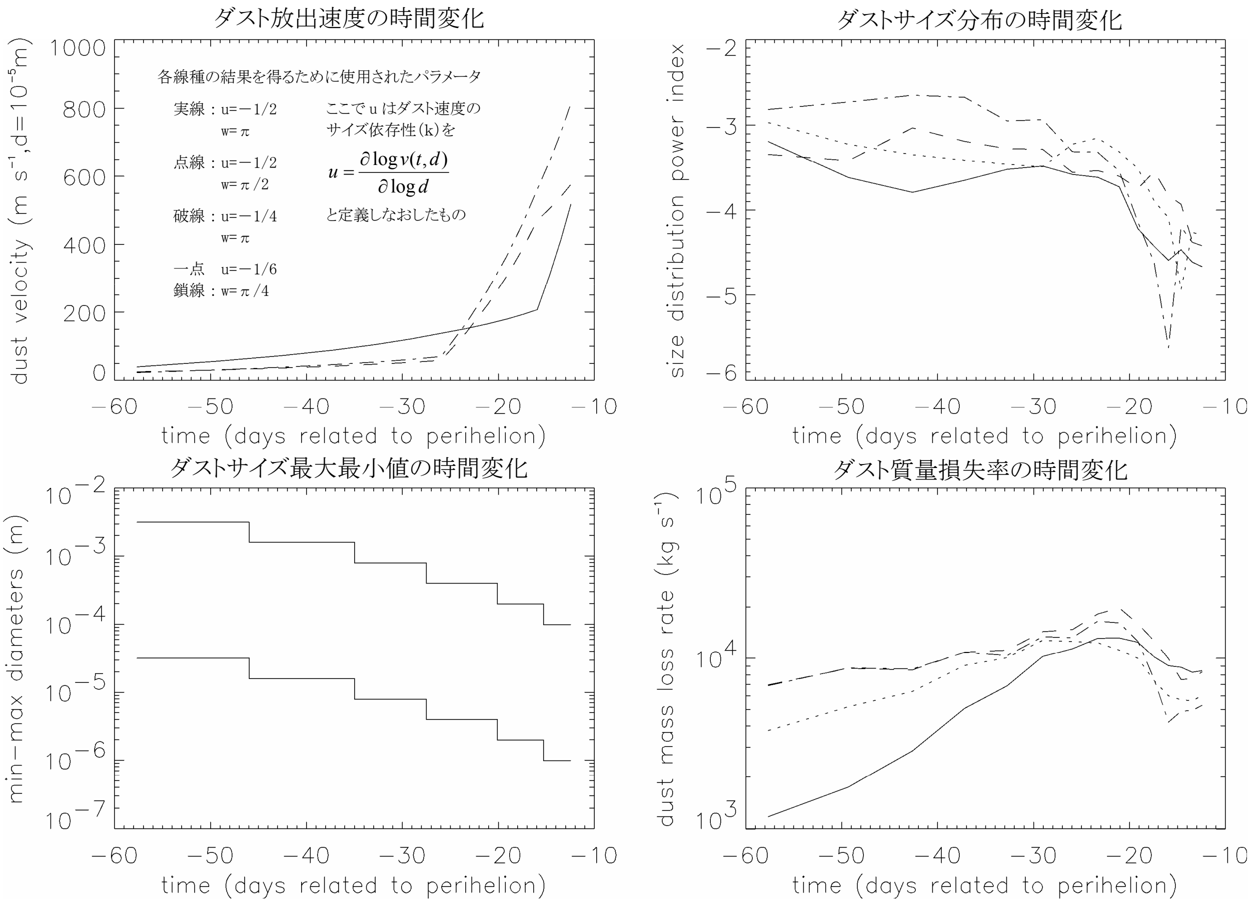
ダストの質量損失率は、

$$\dot{M}(\mathrm{t})=K_5\left\langle(\rho_{\mathrm{d}}\mathrm{d})^3\right\rangle\dot{N}(\mathrm{t})$$
$$=K_6\dot{\mathrm{N}}_{\mathrm{rel}}(\mathrm{t})\int_0^\infty f(\mathrm{t},1-\mu)/(1-\mu)\mathrm{d}(1-\mu) \qquad \cdots(33)式$$

ここで、K_1～K_6 は時刻とサイズに依存しない量をまとめたものである。なお平均サイズ分布 $\mathrm{f}(1-\mu)$ は

$$f(1-\mu)=\int_{-\infty}^{+\infty}F(\mathrm{t},1-\mu)\mathrm{dt}\Big/\int_{-\infty}^{+\infty}\dot{\mathrm{N}}_{\mathrm{rel}}(\mathrm{t})\mathrm{dt} \qquad \cdots(34)式$$

逆算法によって求められた結果（Comet Hyakutake 1996B2 by Marco Fulle *et al*, 1997）の例



で求められる。

このような逆算法によって、観測画像から求められた結果の一例として、Fulle（1997）による百武彗星（1996B2）のダスト放出速度、サイズ分布、質量損失率の近日点通過日数による時間変化の様子を、前ページ下の図に掲載する。

逆算法による結果の評価として、Fulle（1992）による、Marquardt（1970）の理論の紹介によれば、ソリューション・ベクトル F に影響している誤差は、

e_1: カーネル・マトリクス A を経て影響する誤差の伝播

e_2: α のウエイトをかけた任意の制約 B を導入したバイアス

e_3: 自由パラメータ u と w の未知の真の組み合わせとの誤差

であり、e_1 と e_2 が次式によって与えられているとき、非線形パラメータの全ての可能な組み合わせを通して対応する解の変化を見れば、e_3 を見積もることができる（Marquardt, 1970）。

$$e_1 = \mathrm{Trace}\left[s^2\left(A^TA+\alpha B\right)^{-1}\left(A^TA\right)\left(A^TA+\alpha B\right)^{-1}\right] \cdots (35)\text{式}$$

$$e_2 = F^T\left[\left(A^TA+\alpha B\right)^{-1}\left(A^TA\right)-I\right]^T \times \left[\left(A^TA+\alpha B\right)^{-1}\left(A^TA\right)-I\right]F \cdots (36)\text{式}$$

ここで、s^2 はデータの分散、I は単位行列、F はテストの平均によって計算された真の解となるはずである。ダストテイル問題は高度に非適切なため、全般的にバイアスとして自由パラメータ u と w に、より小さな不確実性を導入すること、即ち $e_1 < e_2 < e_3$ を通じて得る強力な制約を正則化の解に導入しなければならないので、u と w を変化させている結果の分散が、解に含まれる誤差の評価に、良い見積もりを与える。

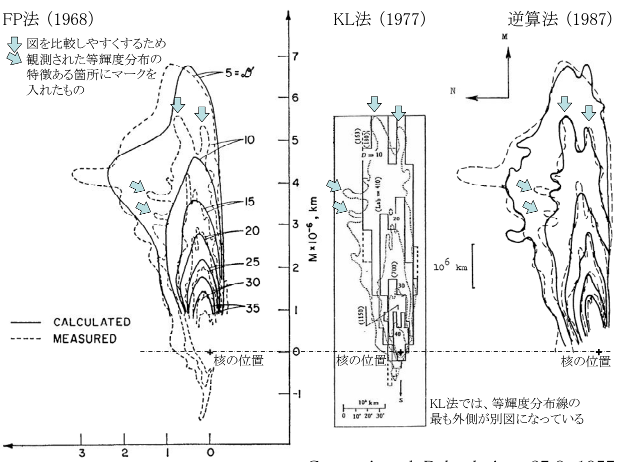
ところで、FP 法における「超音速近似」のような条件を与えていない逆算法では、大きなダストの場合でも計算をできるので、例えば、流星軌道へのダスト注入量を見積もることもできる。

$$\mathcal{M}_i = \frac{8S_{10}(\mathrm{M,N})r_0^2 10^{0.4H-4}}{3I(\mathrm{M,N})\mathrm{A}\varphi(\alpha)\tan^2 1°} \times C_{pr}Q_{pr}\sum_{h=1+(i-1)Rt}^{iRt}\sum_{p=1}^{N\mu}\sum_{q=1}^{Ns}\frac{F_{ij}K_{hpq}\Delta\mu_i}{(1-\mu)_p N_\mu} \cdots (37)\text{式}$$

ここで $\mathcal{M}_i$ は太陽系束縛軌道への流星物質の質量損失率、S_{10} は1平方度に含まれる 10 等級の赤い星の数を単位として表したダストテイルの輝度、r_0 は観測時刻における太陽と彗星の日心距離（単位は a.u.）、A φ（α）は位相角に対するアルベド、H=−27.26 は R バンドにおける太陽の等級、添え字 h,p,q に対し、ダスト粒子の離心率が $0 \leqq e_d < 1$ のとき K_{hpq}=1、そうでなければ K_{hpq}=0 である。

むすびに

各著者の論文に、それぞれ掲載をされている、同一の Arend-Roland 1957Ⅲ彗星の観測画像に対する、各手法による計算結果のフィッティングを、同一スケールにして並べてみた。



Comet Arend-Roland, Apr. 27.8, 1957

いずれの手法による結果も、観測画像の輝度分布を、概ね良く再現してきていることがわかる。

謝　辞

このレビューは、彗星物理水曜ゼミのメーリング・リスト上で行った 7 本の論文輪講の内容をまとめたものです。メンバーの皆さんに感謝します。

参考文献

Finson,L.R. and Probstein,R.F. (1968a), A Theory of Dust Comets. I. Model and Equations, ApJ.154, 327-352.

Finson,L.R. and Probstein,R.F. (1968b), A Theory of Dust Comets. II. Results for Comet Arend-Roland, ApJ.154, 353-380.

Fulle,M. (1987), A new approach to the Finson-Probstein method of interpreting cometary dust tails, A&A171, 327-335.

Fulle,M. (1989), Evaluation of cometary dust parameters from numerical simulations - Comparison with an analytical approach and the role of anisotropic emissions, A&A217, 283-297.

Fulle,M., Cremonse,G., Jockers,K. and Rauer,H. (1992), The dust tail of Comet Liller 1988V, A&A253, 615-624.

Fulle,M., Mikuz,H. and Bosio,S. (1997), Dust environment of Comet Hyakutake 1996B2, A&A324, 1197-1205.

Kimura,H. and Liu,C. (1977), On the Structure of Cometary Dust Tails, Chinese Astronomy 1, 235-264.

Moreno,F. *et al.* (2003), The dust tail of Comet C/1999 T1 McNaught-Hartley, A&A399, 789-794.

Moreno,F. *et al.* (2004), Dust in Comet 67P/ Churyumov-Gerasimenko, ApJ.613, 1263-1269.

長谷川均(1989)、「Finson & Probstein model の紹介」、彗星夏の学校 1989 配布資料

質疑応答

渡部：逆算法の実際への応用は行っていますか？

秋澤：私たちのグループでは、まだ逆算法の理論を勉強している段階で、よく理解できていないものですから、これからの課題になります。今回はそのネット経由の輪講の勉強結果をまとめたものをレビューしました。

渡部：しっかしよく勉強しているなぁ・・・ Fulle たちのグループ以外では、世界で一番勉強しているかも!?(笑)
ストリーエを解釈するのは、総合的なテイルモデルとは別で、特にストリーエは、SFM (Sekanina and Farrell, 1980)の二次的崩壊モデルが広く定着しているので・・・
（このレビューを行うきっかけとなった）
McNaught 彗星の解析はSFMでしたね？

秋澤：はい、SFMで二日間は(同じパラメータで)上手く再現できましたが、それ以上の長い期間では・・・ (秋澤・菅原・渡部、「マクノート彗星(C/2006 P1)のダストテイル諸構造について」、『彗星夏の学校 2007 集録』10-13頁 http://css.little-hp.net/McNaught.pdf をご参照ください)

渡部：最近、太陽観測衛星に受かる彗星のストリーエが、SFMで上手く説明できていて、実はFLM(西岡さんと渡部さんによる有限寿命粒子モデル＝Finite Lifetime Fragment Model)が少し不利になっていてね・・・

秋澤：今回のレビューで、(バンコクで開催されたAOGS2007 の際に発表した Akisawa,H., Sugawara,K. and Watanabe,J., “The Dust Tail Structures of C/2006 P1 (McNaught)” で、H.U.Keller さんから「モデルが古すぎる」と指摘をされたことに対する） 新しいダストテイル理論の勉強は一段落をしたので、McNaught 彗星にもどって、FLM を含めて、ストリーエの解析を再開したいと思っていますので、皆さん、いろいろ、ご指導下さい。